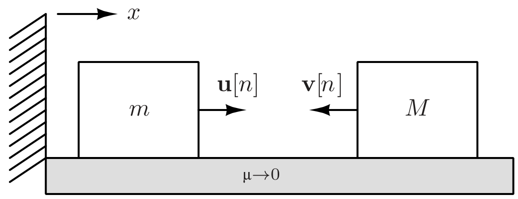
***14.** У механичком систему са слике познат је однос маса крутих блокова $\alpha = \frac{M}{m}$. Зид са леве је веома масиван и практично непокретан, а са десне стране подлога се протеже у бесконачност. Занемарити трење између подлоге и блокова, $\mu \to 0$. У почетном тренутку су вектори брзина блокова $\mathbf{v} = v_0 \mathrm{i}_x$ и $\mathbf{u} = 0$ ($v_0 > 0$).



Слика 14.1

Након k међусобних судара блокова су њихови алгебарски интензитети брзина $v[k]$ и $u[k]$. (а) Одредити низове $v[k]$ и $u[k]$. Одредити (б) укупан број судара између блокова у процесу, N, ако је $\alpha = 400^m$, где је m цео број. Сматрати да су сви судари у систему *апсолутно еластични*.

Помоћ. Након апсолутно еластичног судара, дуж правца, између блокова масе m_1 и m_2 почетних алгебарских интензитета брзина u_1 и u_2 њихови нови алгебарски интезитети брзина су $v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}u_2$ и $v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}u_2$ редом. Референтни смерови брина блокова су један ка другом.

Решење: Пошто се судари дешавају у дискретним временским тренуцима док је између њих стање система непроменљиво, процес представљен у задатку се може сматрати *дискретним* у односу на текући број судара. Стање након k-тог судара описано је системом датих диференцних једначина као

$$v[k+1] = \frac{M-m}{M+m}v[k] + \frac{2m}{M+m}(-u[k]) \tag{14.1}$$

$$u[k+1] = \frac{2M}{M+m}v[k] + \frac{m-M}{M+m}(-u[k]), \tag{14.2}$$

Важно је нагласити да се у једначинама појављује $-u[k]$ будући да леви блок у судару учествује *након* одбијања о зид са леве стране што доводи до промене знака брзине тог блока. Елиминисањем конкретних маса преко задатог параметра α има се

$$v[k+1] = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}v[k] - \frac{2}{\alpha+1}u[k] \tag{14.3}$$

$$u[k+1] = \frac{2\alpha}{\alpha+1}v[k] - \frac{1-\alpha}{\alpha+1}u[k] \tag{14.4}$$

(б) Одређивање одзива система обавља се применом $\mathcal{Z}$-трансформације уз уважавање почетних услова[8] чиме се добија

$$z(V(z) - \cancelto{v_0}{v[0]}) = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}V(z) - \frac{2}{\alpha+1}U(z) \tag{14.5}$$

$$z(U(z) - \cancel{u[0]}) = \frac{2\alpha}{\alpha+1}V(z) - \frac{1-\alpha}{\alpha+1}U(z) \tag{14.6}$$

Сређивањем израза у форму система алгебарских једначина по $V(z)$ и $U(z)$ има се.

$$-zv[0] = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} - z\right)V(z) - \frac{2}{\alpha+1}U(z) \tag{14.7}$$

$$0 = \frac{2\alpha}{\alpha+1}V(z) - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha+1} + z\right)U(z) \tag{14.8}$$

[8] користи се теорема $\mathcal{Z}\{x[n+1]\} = z(\mathcal{Z}\{x[n]\} - x[0])$.

Решавањем система једначина налазе се резултати:

$$U(z) = \frac{2\alpha v_0 z}{z^2 + 2z\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} + 1} \tag{14.9}$$

$$V(z) = \frac{v_0 z\left(z + \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)}{z^2 + 2z\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} + 1} \tag{14.10}$$

Непосредном идентификацијом, одређујемо инверзну $\mathcal{Z}$-трансформацију добијених резултата: $u[k] = v_0\sqrt{\alpha}\sin(k\Omega_0)$ и $v[k] = v_0\cos(k\Omega_0)$, где је $\Omega_0 = \arccos\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)$.

Блокови ће наставити сударање све док након k судара брзина десног блока у десно не постане већа од брзине левог блока – односно, када након одбијања левог блока о зид он не буде могао да сустигне већи блок. То је изражено условом у облику $-v[k] \geqslant u[k]$. Гранично решење потражимо у скупу реалних бројева сменом $k \mapsto t$ као

$$-\cancel{v_0}\cos(t\Omega_0) = \cancel{v_0}\sqrt{\alpha}\sin(t\Omega_0) \Rightarrow \cos(t\Omega_0) = -\sqrt{\alpha}\sin(t\Omega_0) \Rightarrow \tan(t\Omega_0) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tag{14.11}$$

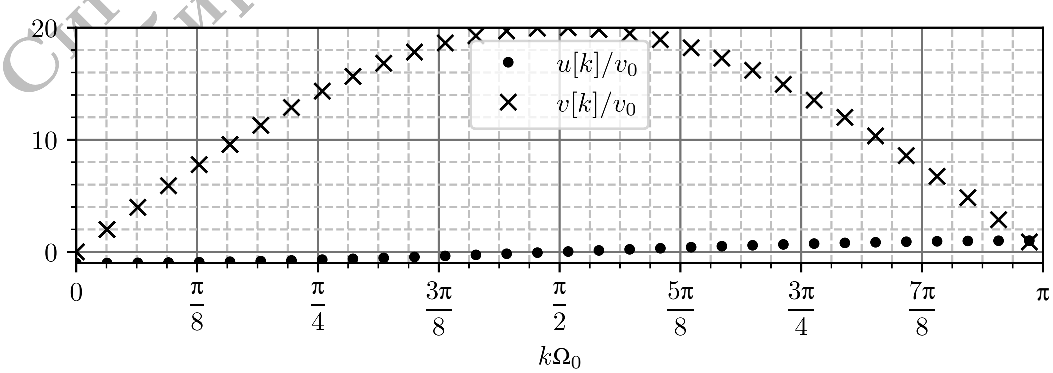
$$\Rightarrow \quad t = \frac{1}{\Omega_0}\left(\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) + \pi\right) \tag{14.12}$$

$$\Rightarrow \quad k_{\max} = N = \lfloor t \rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\Omega_0}\left(\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) + \pi\right)\right\rfloor \tag{14.13}$$

Размотримо шта се дешава када α постаје велико. Тада је $\arctan\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \to 0$, а добијена дискретна кружна учестаност се може апроксимирати у околини јединице помоћу Тејлоровог развоја[9] поступком

$$\Omega_0 = \arccos\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) = \arccos\left(1 - \frac{2}{\alpha+1}\right) \approx \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \tag{14.14}$$

Заменом добијене апроксимације у израз 14.13 добија се реултат: $N = \lfloor \pi\sqrt{\alpha}/2 \rfloor$. Односно, уколико је $\alpha = 400^m$ онда је $N = \lfloor 10^m\pi \rfloor$, дакле, првих m цифара броја π (!) На слици 14.2 приказан је један пример сигнала $v[k]$ и $u[k]$ за $\alpha = 400$.



Слика 14.2: Пример за $\alpha = 400$, укупно $N = \lfloor 10\pi \rfloor = 31$ судара.

[9] Када је $x \to 0$ тада је $\arccos(1-x) \approx \sqrt{2x}$